Varianta 050

Subiectul I

a) 5. b) $\sqrt{2}$. c) 0. d) $a=1; b=-5$. e) $A=\frac{3}{2}$. f) $\frac{1}{\sqrt{2}}$.

Subiectul II

1) a) 0. b) 0. c) 5. d) $\frac{5}{4}$. e) $3^1<19,\ 3^2<19,\ 3^3>19,\ 3^4>19,\ 3^5>19 \Rightarrow$ p= $\frac{3}{5}$.

2) a) $15x^{14}+2$. b) $\frac{1}{16}$. c) $f'(0)=2$. d) $f'(x)>0$. e) $\frac{2}{5}$.

Subiectul III

a) Verificare directă.

b) $AA^t=I_2$ şi $BB^t=I_2$.

Avem: $(AB)\cdot(AB)^t=(AB)\cdot\left(B^t\cdot A^t\right)=A\left(BB^t\right)A^t=AI_2A^t=AA^t=I_2 \Rightarrow AB\in G$.

c) Fie A$\in G \Rightarrow A\cdot A^t=I_2 \Rightarrow A^{-1}=A^t$.

d) Se verifica axiomele grupului.

e) $f(I_2)=1,\ f(C)=-1 \Rightarrow f$ surjectivă.

Cum $I_2\in G, B=\begin{pmatrix}\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2}\\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2}\end{pmatrix}\in G$, $f(I_2)=f(B)=1 \Rightarrow$ f nu este injectivă.

f) Fie $R_a=\begin{pmatrix}\cos a & -\sin a\\ \sin a & \cos a\end{pmatrix}, R_a\cdot R_b=R_{a+b}, (R_a)^{-1}=R_{-a}$.

g) Fie $D=\begin{pmatrix}\cos\frac{2\pi}{2007} & -\sin\frac{2\pi}{2007}\\ \sin\frac{2\pi}{2007} & \cos\frac{2\pi}{2007}\end{pmatrix}$. Construim subgrupul H al lui G.

H= $\left\{D^n \middle| n\in \mathbf{N}\right\}=\left\{D^n \middle| n=\overline{0,2006}\right\}$.

Subiectul IV

a) $f'(x)=\frac{-x}{x+1}; h'(x)=\frac{x^2}{1+x}; (\forall)x\in[0,1]$.

b) Evident: $f'(x)\le 0$ si $h'(x)\ge 0, (\forall)x\in[0,1]$.

c) Din b) rezultă f strict descrescătoare şi h strict crescătoare, deci $\ln(1+x)\le x$ si

$\ln(1+x)-x+\frac{x^2}{2}\ge 0, (\forall)x\in[0,1.]$.

d) $\lim\limits_{x\to 0} g(x)=g(0)=1 \Rightarrow g$ continua la dreapta şi în punctul $x_0=0$.

e) Avem :

$0 \le \ln(1+x^n) \le x^n, (\forall) x \in [0,1], (\forall) n \ge 1. \Rightarrow 0 \le \int_0^1 \ln(1+x^n)dx \le \int_0^1 x^n dx = \frac{1}{n+1}, (\forall) n \ge 1,$

adică $0 \le a_n \le \frac{1}{n+1}$, oricare ar fi n ≥ 1. Utilizând criteriul cleștelui obținem: $\lim_{n\to\infty} a_n = 0.$

f) $\int_0^1 G(x^n)dx = \int_0^1 x' \cdot G(x^n)dx = x \cdot G(x) \Big|_0^1 - n \cdot \int_0^1 x^n \cdot g(x^n)dx$

Cum $x^n \cdot g(x^n) = \begin{cases} x^n \cdot \frac{\ln(1+x^n)}{x^n}, & x \in (0,1] \\ 0 \cdot 1, & x = 0 \end{cases} = \ln(1+x^n), \ \forall x \in [0,1],$ obținem

$\int_0^1 G(x^n)dx = G(1) - n \cdot \int_0^1 \ln(1+x^n)dx = G(1) - n \cdot a_n$, rezultă concluzia.

g) Avem: $|n \cdot a_n - G(1)| = \left|\int_0^1 G(x^n)dx\right| \le \int_0^1 |G(x^n)|dx.$

$|G(x)| = \left|\int_0^x g(t)dt\right| \le \int_0^x |g(t)|dt \le Hx;$ unde $H = \sup_{t\in[0,1]} |g(t)|.$

Prin urmare $|G(x^n)| \le Hx^n, (\forall) x[0,1]; (\forall) n \ge 1.$

Deci $|na_n - G(1)| \le H\int_0^1 x^n dx = \frac{H}{n+1}; (\forall) n \ge 1.$

Cum: $\lim_{n\to\infty} \frac{H}{n+1} = 0;$ avem $\lim_{n\to\infty}(na_n) = G(1).$